

Title	粘性流体中を運動する天体の受ける抵抗(ナビエ・ストークスの方程式の解)
Author(s)	武田, 英徳; 松田, 卓也
Citation	数理解析研究所講究録 (1984), 510: 295-314
Issue Date	1984-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/98300
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

粘性流体中を運動する天体の受ける抵抗^(*)

京大工 武田英徳 (Hidenori Takeda)

京大工 松田卓也 (Takuya Matsuda)

§1 序論

天体現象の一つの大きな特徴は、その天体の持つ重力が種々の現象に強い影響を及ぼすことが多いことである。粘性流体中を運動する物体の受ける抵抗の大きさも、その物体の重力の強さによって大きく変わる可能性がある。後で述べるように、この抵抗値を知ることは、太陽系の形成の歴史をより正確に記述する為に必要なことであり、それゆえ我々は、気体中を運動する天体の受ける抵抗の大きさを、数値計算によって得ることを試している。

先ず太陽系形成の歴史について簡単に述べておこう。⁽¹⁾⁽²⁾

(*) この報告は 沢田忠介、林忠四郎 との共同研究を 武田と松田とがまとめたものである。

(1) 中沢清也、7月号 vol.48 (1978) P391-396 & P422-429, P430-434

(2) 林忠四郎・中川義次、日本の科学と技術 7-8月号 vol.21 (1980) P66

銀河系内には、星、ガス(星間ガス)、ガスの塊(星間雲)が存在している。この星間雲の一部に周囲より密度の高い部分ができ、それが重力により収縮を始める。ついには、一つの原始星、あるいは、二重星・三重星等の連星系、又は、中心星とそのまわりに円盤状の星雲をもつ原始太陽系が形成される。いずれになるかは、収縮を始めた部分の、質量、角運動量分布等の物理量に依存する。ここでは図1-2^(*)のような原始太陽とそのまわりを回る円盤状のガス雲からなる原始太陽系を考えよう。このガス雲中には、大きさが 10^5 cm 程度のダストと呼ばれる固体微粒子が含まれているが、これは星雲の赤道面に向かって沈澱を始める(図3)。この沈下の際、ダストは互いに衝突し、くっつきあい、大きい粒子へと成長し、ついには、赤道面に固体粒子の薄い層(ダスト層)が形成される(図4)。ダスト層の物質密度が大きくなり、ロツシェ Limit を越えると固体層はその自己重力により分裂し微惑星と呼ばれる半径 $\sim 10 \text{ km}$ 、質量 $\sim 10^{25} \text{ gm}$ の多数の天体が現われる(図5)。この微惑星が、互に衝突し合体することによりさらに大きくなり原始の惑星(質量 $\sim 10^{25} \text{ gm}$)となる。この原始惑星は、さらに微惑星^(**)をとらえ成長し、最終的には現在みられるような惑星が形

(*) 図1は参考文献(1)による。図2~5は(2)による。

(**) このプロセスをより詳しく知るには(1),(2)を見られたし。

成される。

微惑星 → 原始惑星 → 惑星 という衝突による成長過程をもう少し詳しく考えてみよう。原始太陽系星雲はほぼ Kepler 運動をしている。この運動にのった系から見ると、粒子（微惑星、原始惑星）は、固有運動（Kepler 運動を差引いたもの）をもって互いに衝突する。固有運動の大きさは、 $\langle e \rangle \cdot v_k$ の程度である。 v_k は Kepler 速度であり、 e は離心率である。 e を定める方程式は、次のように書ける。

$$\frac{1}{e^2} \frac{de^2}{dt} = n_p e v_k \pi r^2 \theta \ln \Lambda - \frac{S_e}{r^2} \frac{dr^2}{dt} - \frac{2}{\zeta_0} (e + i) \quad (1)$$

$$\theta = \frac{GM_0}{r} / u_\infty^2 = \frac{GM_0}{e^2 v_k^2 r}$$

ここで θ は軌道面傾斜角、 r は粒子の半径、 S_e は合体の係数である。右辺の第一項は他の粒子による重力散乱をあらわし、プラズマ物理では、荷電粒子の散乱に対応する。第二項は、粒子が合体することによる e の変化を示し、第三項は粒子がガスによる抵抗を受けて Kepler 軌道に近づくことによる。粒子の半径 r の変化は

$$\frac{3}{2} \frac{1}{r^2} \frac{dr^2}{dt} = \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = n_p e v_k \cdot 4\pi r^2 (1 + 2\theta) = n_p e v_k 4\pi r^2 \left(1 + 2 \frac{GM_0}{e^2 v_k^2}\right) \quad (2)$$

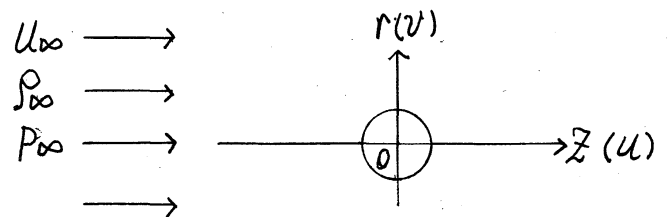
と書くことができる。（ m は粒子の質量、 M_0 は太陽の質量）

ガスによる抵抗は、粒子の離心率 e に影響を与え（式(1)）

ϵ の大きさは、粒子の成長速度を定める(式(2))。このように粒子の受ける抵抗の大きさが、惑星形成時間を決定する量の一つになっているのである。そこで我々は、重力源である固体粒子(簡単のため球状であると仮定した)がガス中を運動している場合に受ける抵抗を数値シミュレーションによって求めている。ここで我々が考えている原始惑星の特徴的物理量を書いておく。質量 $m \sim 10^{25} \text{ gm}$, 半径 $r \approx 10^8 \text{ cm}$, ガスの方は水素分子が主成分であり、その音速 $C_s \approx 10^5 \text{ cm/sec}$, 密度 $\rho_g \sim 10^{-9} \text{ gm/cm}^3$. Reynolds 数は、分子粘性を用いれば極めて大きい値となるが、現実には、渦粘性によりそれ程大きくはないであろう。ここでは、外力の働いていない場合に比べて、重力が流れ場を、又抵抗の大きさをどのように変えるかをシミュレーションが可能な、比較的小さな Reynolds 数の場合について見てみる。

§ 2 数値計算の方法

球状物体のまわりの流れを軸対称を仮定して解く。無限遠で一様な流れ中におかれた球を考える。解くのは次の円柱座標でも



いた Navier-Stokes 方程式である。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho + \rho u^2 \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho + \rho v^2 \\ (e + p)v \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ (e + p)v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho f^z \\ \rho f^r \\ \rho(u f^z + v f^r) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zz} \\ \tau_{rz} \\ \frac{\mu}{Pr} \bar{e}_{zz} + u \tau_{zz} + v \tau_{zr} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{rz} \\ \tau_{rr} \\ \frac{\mu}{Pr} \bar{e}_{rr} + u \tau_{rz} + v \tau_{rr} \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{rz} \\ \tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} \\ \frac{\mu}{Pr} \bar{e}_{rr} + u \tau_{rz} + v \tau_{rr} \end{pmatrix}$$

ここで ρ は密度, u, v はそれぞれ z, r 方向の速度成分である。比熱比 γ とする理想気体を考えると単位質量当りの内部 energy e は $e = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$ といえる (p は圧力)。 $e = \rho \{ \bar{e} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \}$ であり $f^z = -\frac{GM_0 z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$, $f^r = -\frac{GM_0 r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$ である。 Pr は Prandtl 数 μ は粘性係数で $\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \text{div} v$, $\tau_{rz} = \mu [\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z}]$, $\tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu \text{div} v$ である。

数値計算は上式を差分化して解くが, 重力の効果は遠方まで影響を与える為に計算領域は十分大きくとらねばならない。又 物体表面には境界層ができるゆえそこで計算の grid

points を細かくせねばならない。その為に、まずは、計算の time steps を大きくとれる陰的解法で解くことを試している。ここで採用したのは、Beams & Warming⁽³⁾ による Implicit Factored Scheme であり programme は $\xi(x, y) = \eta$, $\xi(x, y) = \eta$ なる座標線であられる一般化座標で書いてある ($\eta=1$ は物体表面を表わす)。式は P. Kutler et al⁽⁴⁾ に示してある。

我々のこれまでの計算の多くは、座標系は、簡単の為に、球座標を採用している。座標点は物体表面で密に、外に行く程粗になるようにとってある。図6に例を示す。

差分は中心差分を採用しているので、物体表面及び外の境界では、物理量を(数値境界条件を)与えてやらねばならない。物体表面では、 $u=0, v=0, p, P$ は r 方向に(内から)外挿した値を用いた^(*)。一番外側の座標点では、 u, v, p, P の値を内側から外挿して求めた。但し流入側では $p=p_\infty, u=u_\infty, v=0, P=P_\infty$ ととる。

物理量は p_∞, u_∞, r_p (粒子の半径)で normalize しにものと考えている。数値計算は、 $\gamma=1.4, Pr=0.75$ と行って行った。

(3) Beam and Warming, AIAA Journal vol. 16 No. 4 (1978) p. 933

(4) Kutler et al. AIAA Paper 78-213

(*) 一部の計算では、物体表面は断熱とし、又、運動方程式から $\frac{\partial P}{\partial r} = f_n(r, z)$ なる式を求め、これら二式を差分化して T, P を ($\partial P / \partial r, P$ を) 解くという場合も行ったが大きな違いはない。

重力 = 0 の計算の初期条件としては, $\rho = 1.0$, $p = p_{\infty} = 2.852$ (全 grid points で) ととり, 速度場は, potential 流 (球のまわりの) 値をとった。但し物体表面近くで次第に小さくなるようにしてある。ついで GM/μ_0^2 の値を段階的に上げて計算する。各段階で抵抗値がほぼ一定になるまで時間を追った計算を続ける。

§ 3 数値計算の結果と議論

図 7 ~ 10 に Reynolds 数 = 50 の場合の、密度・圧力の等高線と速度場の図を示す。矢印の一番長いものが速さ = 1.0 を示す。この計算に用いた grid points は図 6 に示されている。

図 7 は重力 = 0 の場合の球の近傍での図である。予想されるごとく、球の上流側よどみ点で、密度・圧力が最大となっている。最小値は球の表面上方にある。球の後側には渦が見られる。

図 8 は $GM/\mu_0^2 = 0.5$ の場合である。重力で引き寄せられる為に ρ_{\max} , p_{\max} は大きくなり、又球上、下流側でも ρ , p は大きくなっている。図 9 は $GM/\mu_0^2 = 1.0$, 図 10 は $GM/\mu_0^2 = 3.0$ の場合である。物体の重力が強くなるにつれて、次第に濃い惑星大気が形成されて行くのがよくわかる。又伴流域の ρ , p に与える影響は、物体近くでは小さくなって行く。重力の効果が強くなるので

あろう。図-7 (C) と図-10 (C) を比べると、渦領域も小さくなり、重力に引き寄せられるように見える。物体近くの等密度線は流れのあることにより円からずれている。(断熱, 非粘性を仮定すれば, 物体から離れたところでは楕円になるはずである) この計算の $r_{max} = 71.65$ で十分に大きいとは言えないようである。そのせいか $\frac{GM}{r_p^2}/u_{\infty}^2$ が大きくなると計算はなかなか収束しない。

$Re = 10$ の計算は, $r_{max} = 3045$ の grid points で計算を行った。 $Re = 50$ に比べて境界層が厚いため計算の time step を大きくとれるので r_{max} も大きくとりうる^(*)。この場合には重力は $\frac{GM}{r^2} e^{-\frac{r^2}{R^2}}$ で計算している。 $r = 100$ のところに cut-off を入れて遠方の重力の効果を落している。現実の場合にも, 他の物体による影響を考えると, cut-off を入れるのはおかしいことではない。図11~13 を見るに、流れの基本的パターンは $Re = 50$ の場合に等しい。(角度方向の分割数が小さいせいか, いささかギクシャクしているが)。 $\frac{GM}{r_p^2}/u_{\infty}^2 = 6.0$ の場合の物体表面の ρ, P は断熱の式と, $\frac{\partial P}{\partial r} = f_n(z, r)$ を解いて求めたものである。(よりがめらかになっている) この場合には, より遠方での等密度線 (図13-d) もも描いてある。重力がより強くなるとより濃い, より“大きな”大気ができるで

(*) 境界層の厚さよりも, $(\Delta r)_{min}$ を小さくするようにしている。time step は $\Delta r / (u_{\infty} + 10)$ に依存する。又計算時間は, $2r_{max}/2\pi$ よりも大きいことが必要であらう

あろう。従って伴流領域もより大きくなると考えられる。

抵抗値の Re , 重力 ($\frac{\rho_p}{\rho_f} \frac{g}{u_\infty^2}$) への依存性を図14,15に示す。重力=0の場合の抵抗の大きさは、実験等から得たものとよく合う(図14)。重力が弱い場合、重力は(重力=0の場合に比べて)抵抗を減じる。それは物体の上流側の密度が下流側に比べて低い
ため、それが物体を引き“推力”を与えるのである。 $\frac{\rho_p}{\rho_f} \frac{g}{u_\infty^2}$ が次第に大きくなると、物体後方の密度が高くなり、重力は抵抗として効き始める(図15)。抵抗の、球の前後の圧力の差による部分は減少してついには負になる) 抵抗係数 C_D が $\frac{\rho_p}{\rho_f} \frac{g}{u_\infty^2}$ にどのように依存するのか(関数形をもとめるには、もっと重力の強い場合の計算が必要である。現実の場合への応用を考え、目下、より大きい $\frac{\rho_p}{\rho_f} \frac{g}{u_\infty^2}$ の値に対して、又、より大きい Re に対する C_D の値を求めることを試みている。

計算には、東京天文台・野辺山電波観測所のM200を使用させていただいた。お礼申し上げます。

太陽系の形成

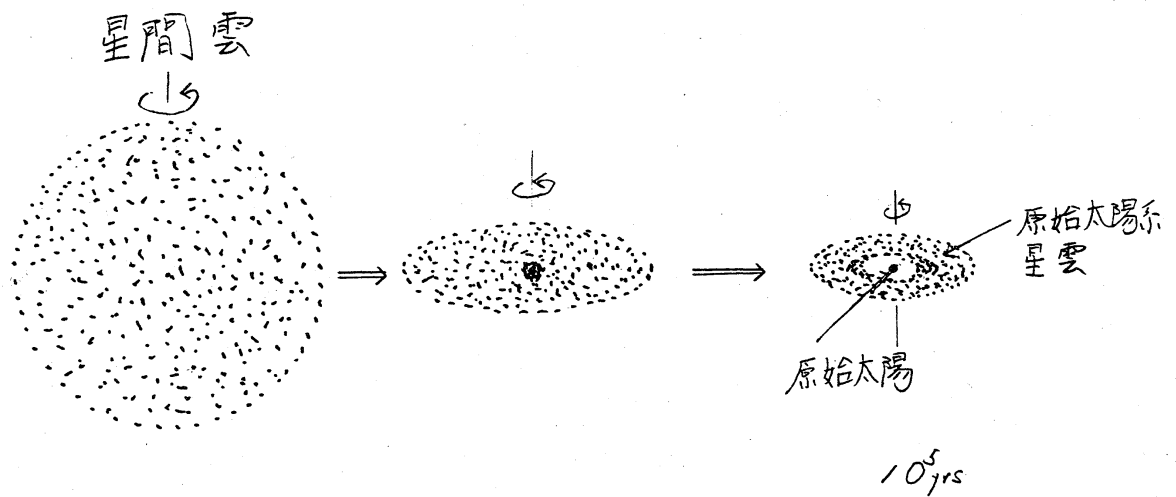
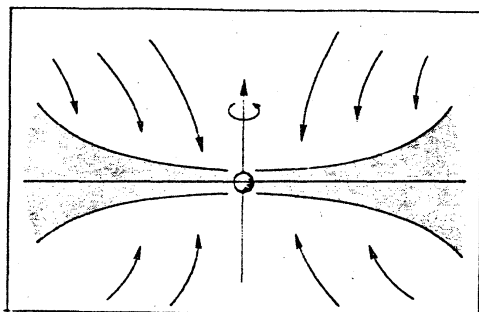
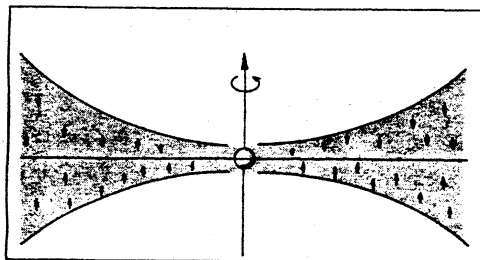


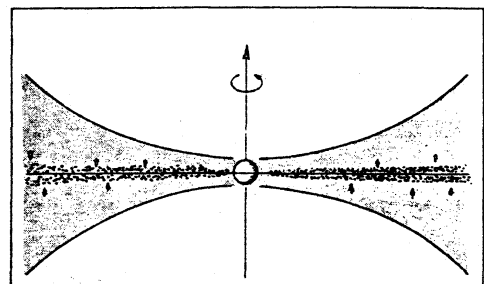
図 1



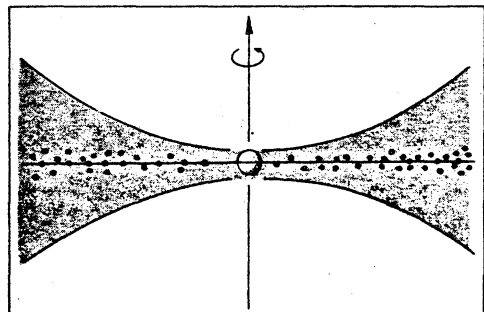
原始太陽と原始太陽系星雲の形成 星雲間の収縮により、原始太陽とその周りを回る円盤状のガス雲、原始太陽系星雲が形成される。〔図-2〕



ダストの沈殿 原始太陽系星雲内のダストは太陽重力に引かれて、赤道面に向かって沈殿する。〔図-3〕



ダスト層の形成 沈殿が始まってから約3000年でほとんどのダストが赤道面に沈殿、ダスト層が形成される。もともと 10^{-5} cm ほどのものであったダストは赤道面に運ばれたときには付着生長により 1 cm ぐらいの大きさになっている。〔図-3〕



星雲中の微小惑星 ダスト層が重力分裂を起こして半径 10 km 、質量 10^{18} g の微小惑星が誕生する。星雲の中で互いに衝突合体を繰り返して生長する。〔図-5〕

図-1 は参考文献(1)、図2・5は参考文献(2)による。

$$\mu = 0.16 \quad Re = 6.25$$

$$\mu = 0.02 \quad Re = 50$$

$$Pr = \frac{C_p \mu}{k} = 0.75$$

$$u_0 = 1, v_0 = 0, \rho_0 = 1.0$$

$$P_0 = 2852$$

— 圧力の値

contour plot

7

軸対称

$$u_0 = 0 \quad \text{半径 } r_0 = 1.0$$

$$v_0 = 0$$

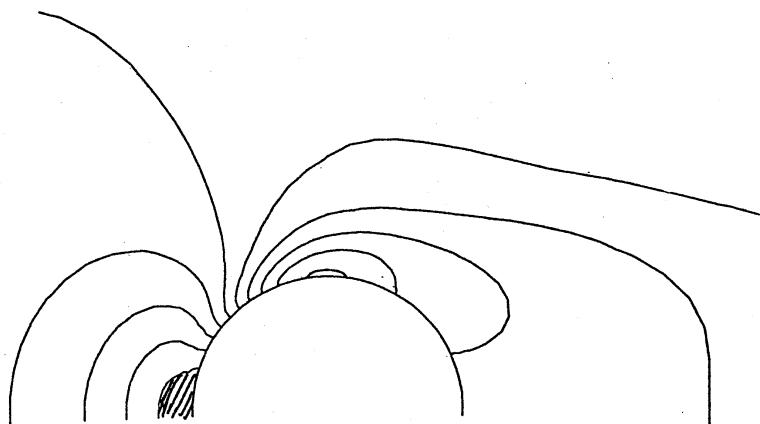
$$P, P: \text{extrapolate}$$

図-6 grid points 数 39×43 角度方向の分割数 = 37 動径方向分割数 = 42
 動径方向の分割巾 $\Delta r = 0.03 \sim 9.241, (\Delta r)_{\min} = 1.15, r_{\max} = 7.65$

(a) 等密度線

$$\rho = 1.14 \sim 0.87$$

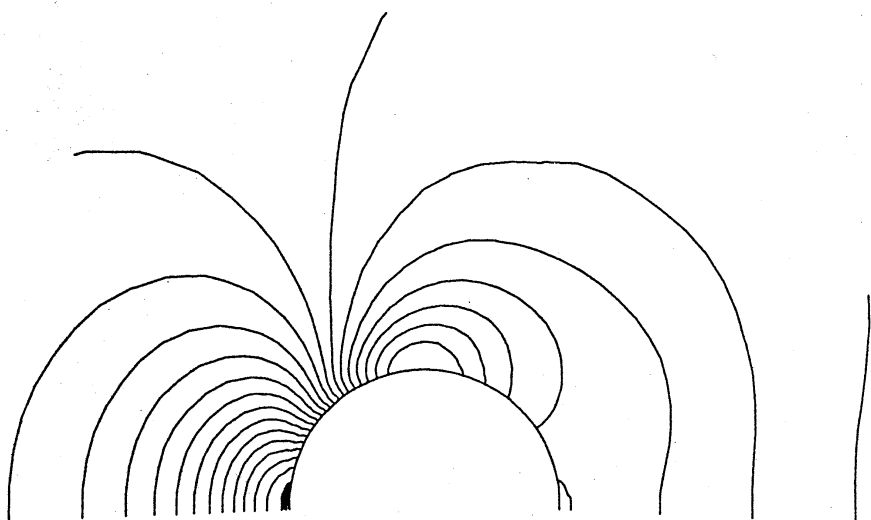
10等分



(b) 等圧線

$$P = 3.4 \sim 2.6$$

21等分



(c) 速度場

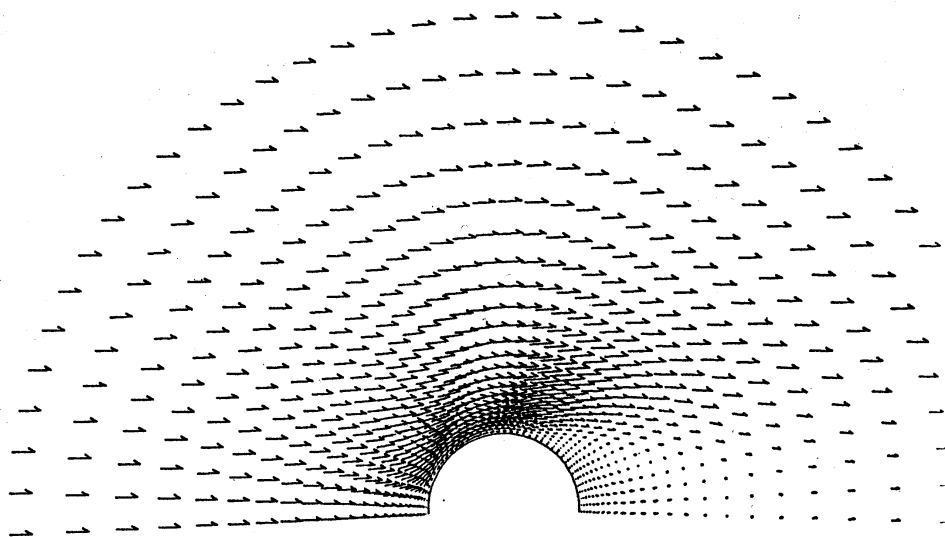
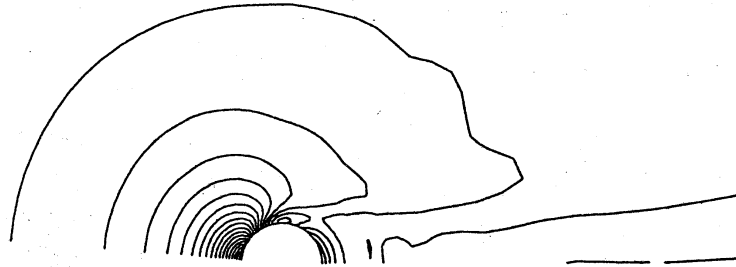


図7 $Re=50$ $\frac{GM}{r}/u_\infty^2=0$, $M=0.5$

(a) 等密度線

$$\rho = 1.28 \sim 0.992$$

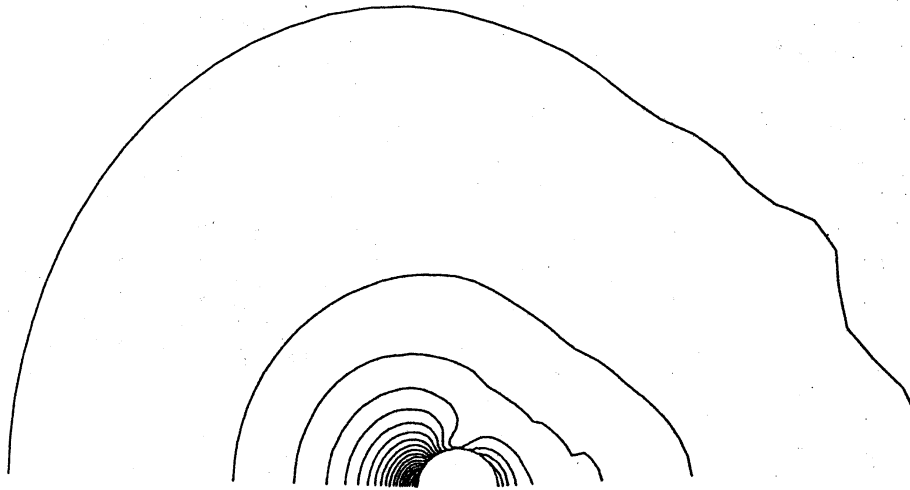
± 21 分割



(b) 等压線

$$p = 40 \sim 2.9 \pm$$

21 分割



(c) 速度場

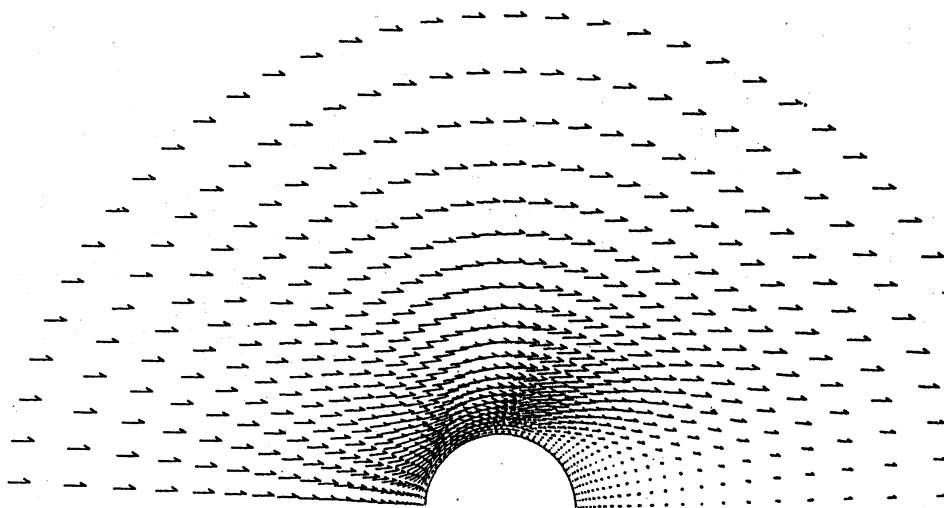


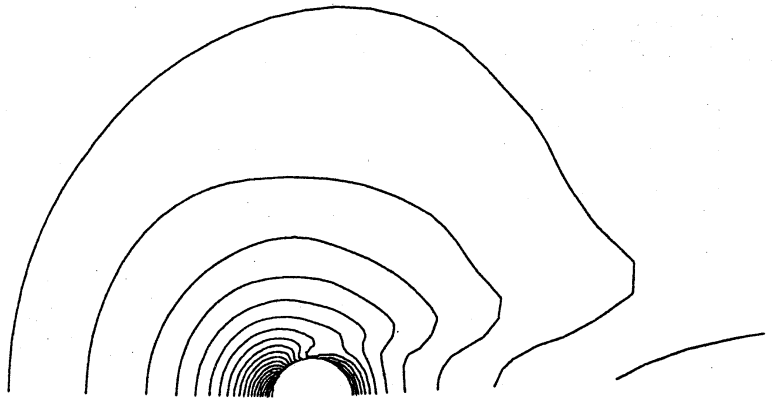
図-8 $Re=50$, $\frac{GM}{\rho} / u_{\infty}^2 = 0.5$, $M=0.5$

(a) 等密度線

$$\rho = 1.40 \sim 1.01 \text{ g}$$

20等分

$$\rho_{\max} = 1.4375$$

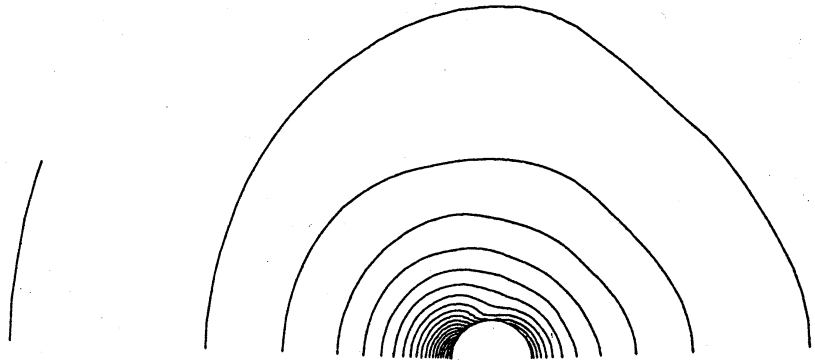


(b) 等圧線

$$p = 4.6 \sim 2.9 \text{ g}$$

20等分

$$p_{\max} = 4.662$$



(c) 速度場

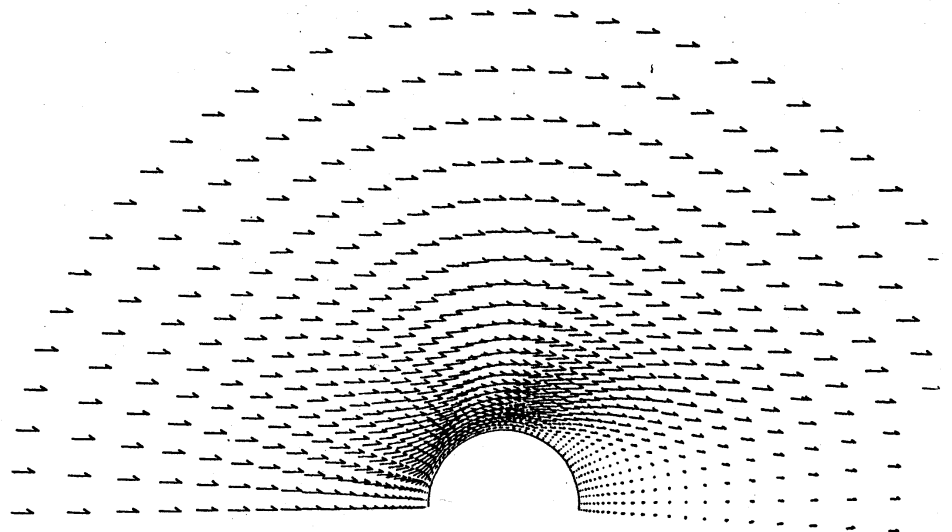


図 9

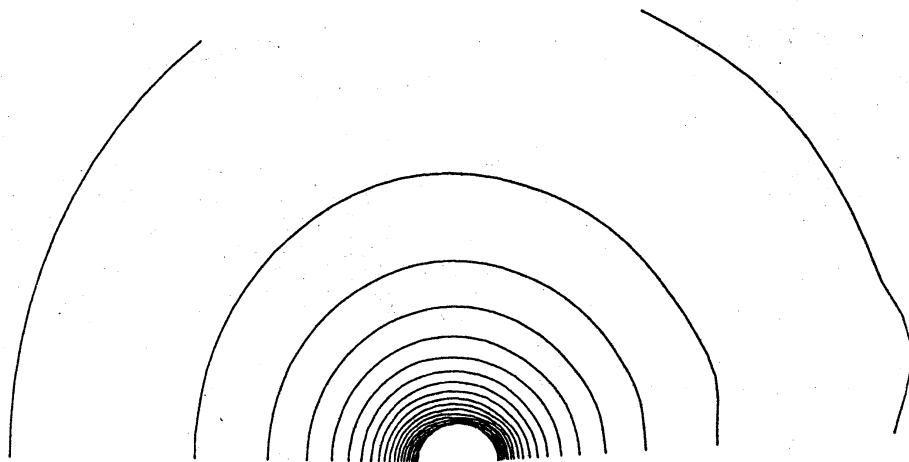
$$Re = 50 \quad \frac{GM}{\rho_p} / u_{\infty}^2 = 1.0, M = 0.5$$

(a) 等密度線

$$\rho = 2.1 \sim 1.06 \text{ ㏪}$$

20分割

$$\rho_{\max} = 2.157$$

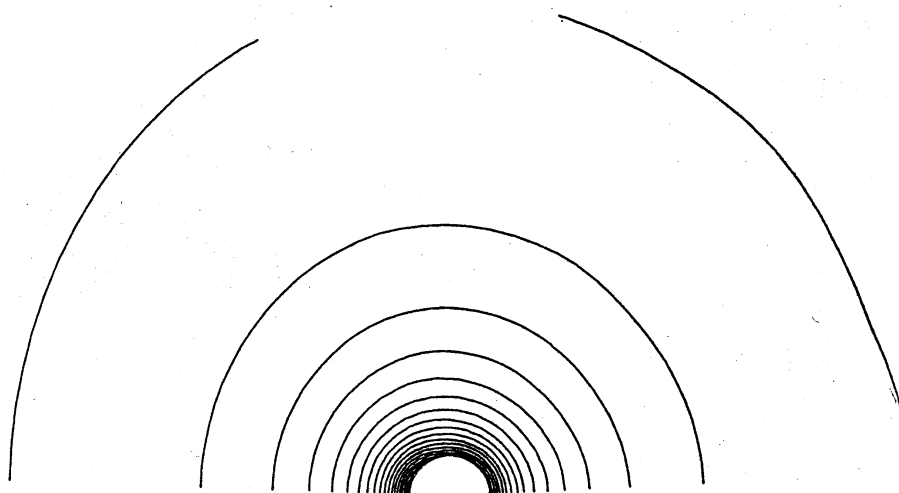


(b) 等圧線

$$P = 8.0 \sim 3.1 \text{ ㏪}$$

20分割

$$P_{\max} = 8.069$$



(c) 速度場

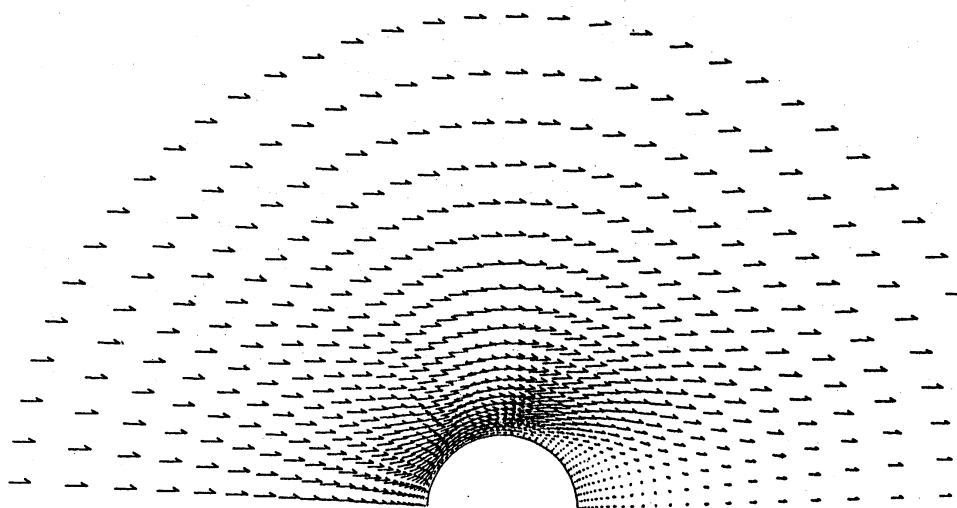


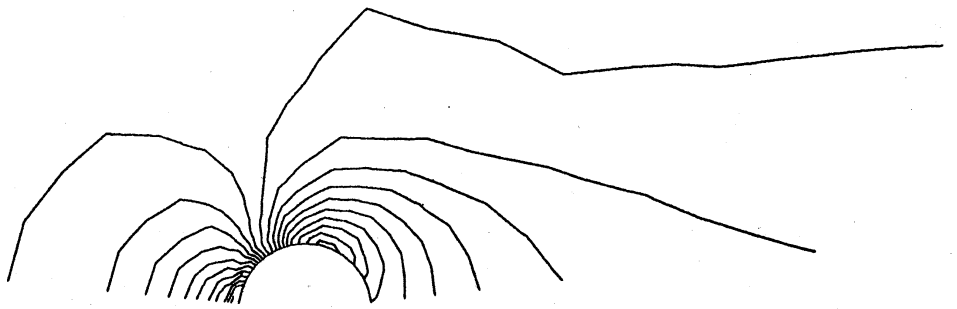
図10

$$Re = 50, \frac{GM}{\rho_p u_\infty^2} = 3.0, M = 0.5$$

(a) 等密度線

$$P=1.6 \sim 0.862$$

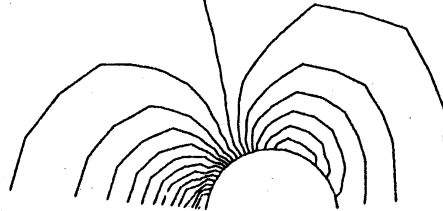
20等分



(b) 等压線

$$P=3.5 \sim 2.51$$

20等分



(c) 速度場

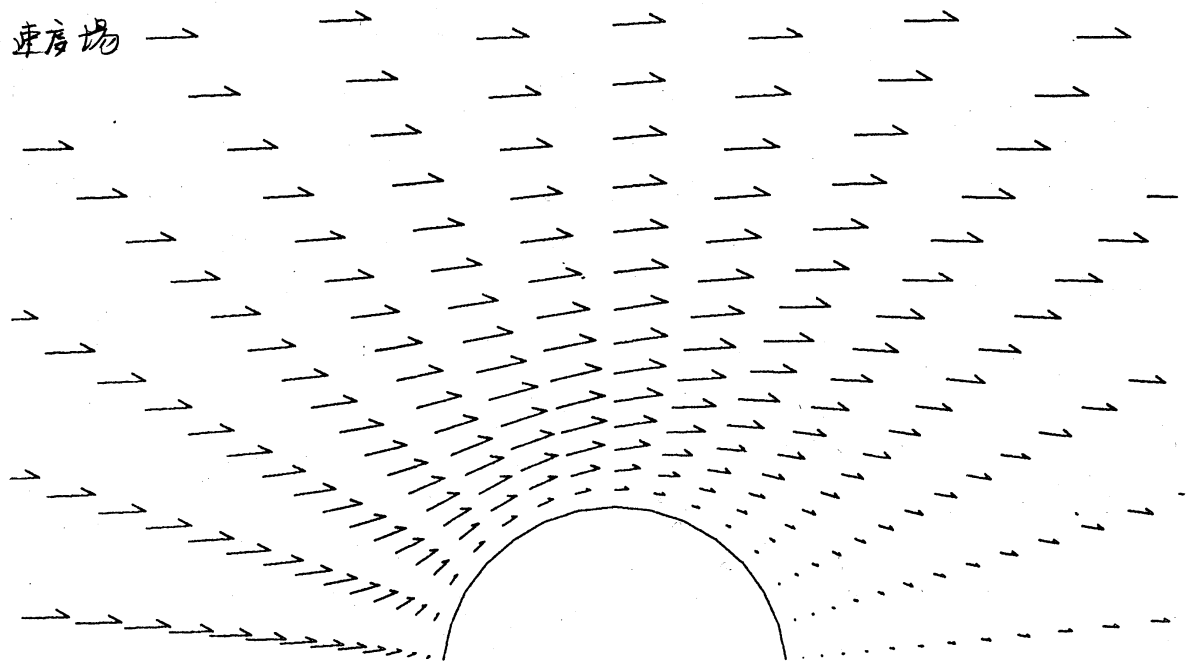


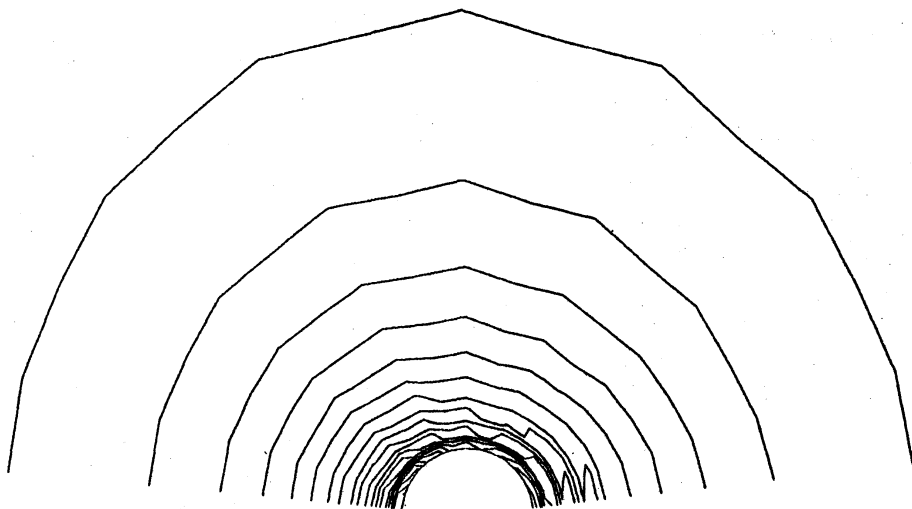
图 11 $Re=10$, $\frac{GM}{r_p^2} = 0$, $M=0.5$ 17×61 points

grid points, 角度方向 15 分割, $\Delta r=0.1 \sim 27.7$, (比 1:1) $r_{max}=304.5$

(a) 等密度線

$\rho = 1.8 \sim 1.03$ まで

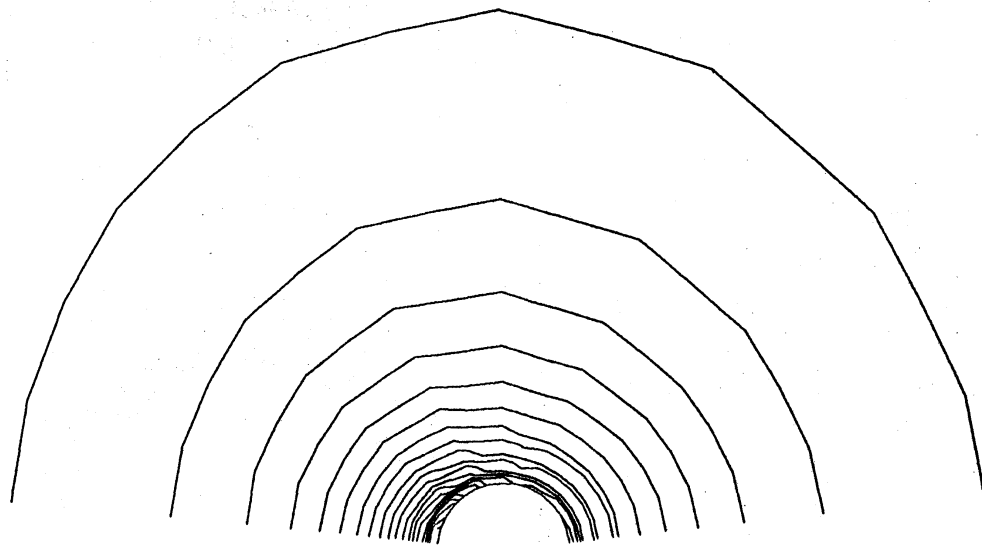
20分割



(b) 等圧系線

$P = 6.1 \sim 2.95$

まで 20分割



(c) 速度場

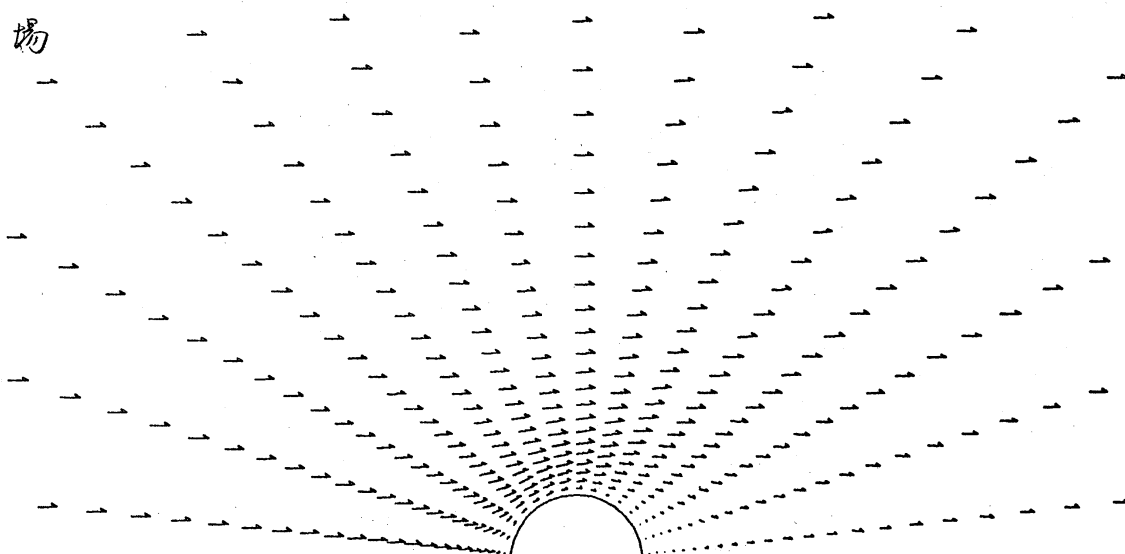


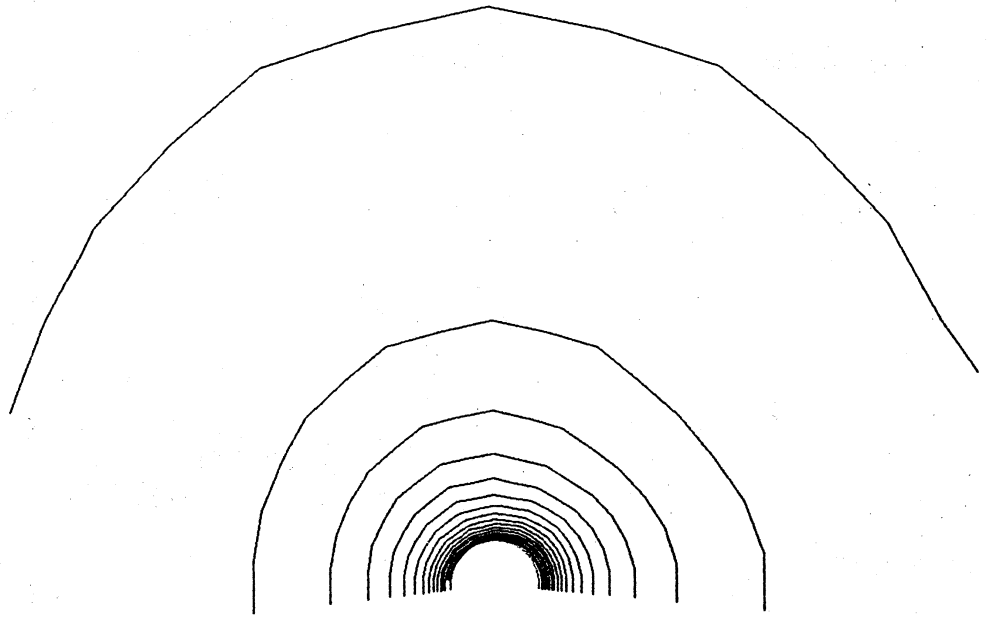
図12 $Re=10$, $\frac{GM}{r_p^2}/u_\infty^2=2.0$, $M=0.5$, 重力には $f = \frac{GM}{r^2} e^{-\frac{r^2}{4\sigma^2}}$ の形で, Cutoffが入っている

(a) 等密度線

$$\rho = 4.5 \sim 0.9995$$

 $\rho = 20$ 分割

$$\rho_{\max} = 4.506$$



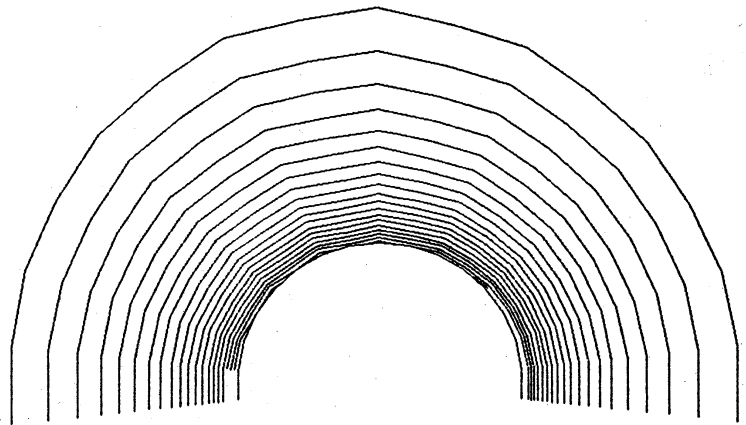
(b) 等圧線

(物体表面近く)

$$p = 16.4 \sim 6.0$$

 $p = 20$ 分割

$$p_{\max} = 16.43$$



(c) 速度場

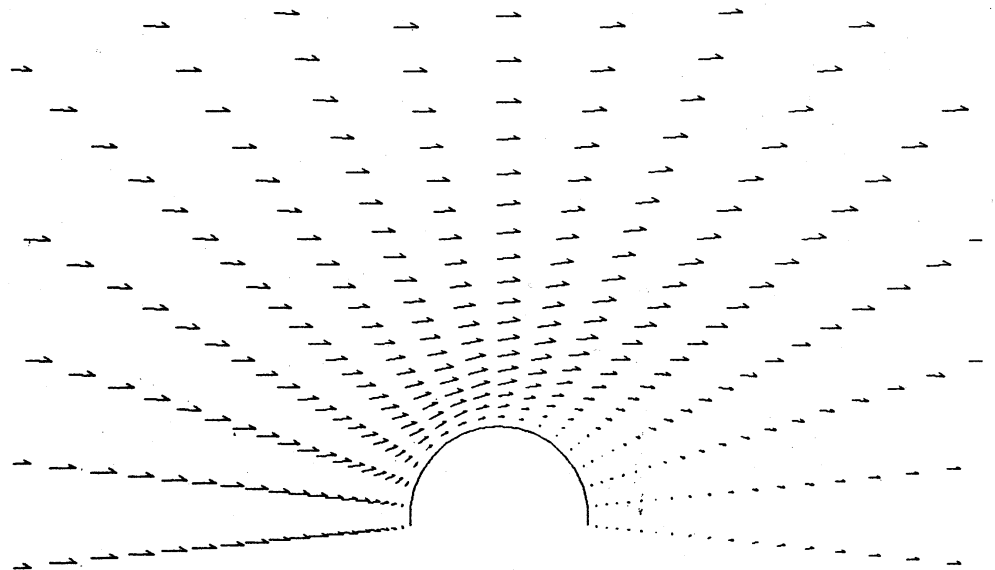
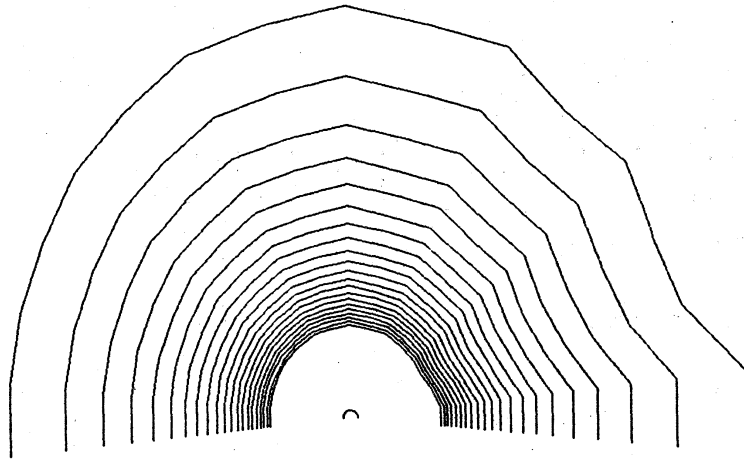


図 13 $Re = 10$, $\frac{GM}{\rho_p U_\infty^2} = 6.0$, $M = 0.5$, 物体表面の境界条件, 断熱, 圧力は“解く” ϕP

図-13 (C) 等密度線

 $\rho = 1.11 \sim 1.01$ を

2/分割

 中心の小さい円は物率
の表面である。

 中. PTP '76 CC P945
林足主. 中沢

 数値計算の場合
フロントル数 = 0.75
Mach 数 = 0.5

図-14

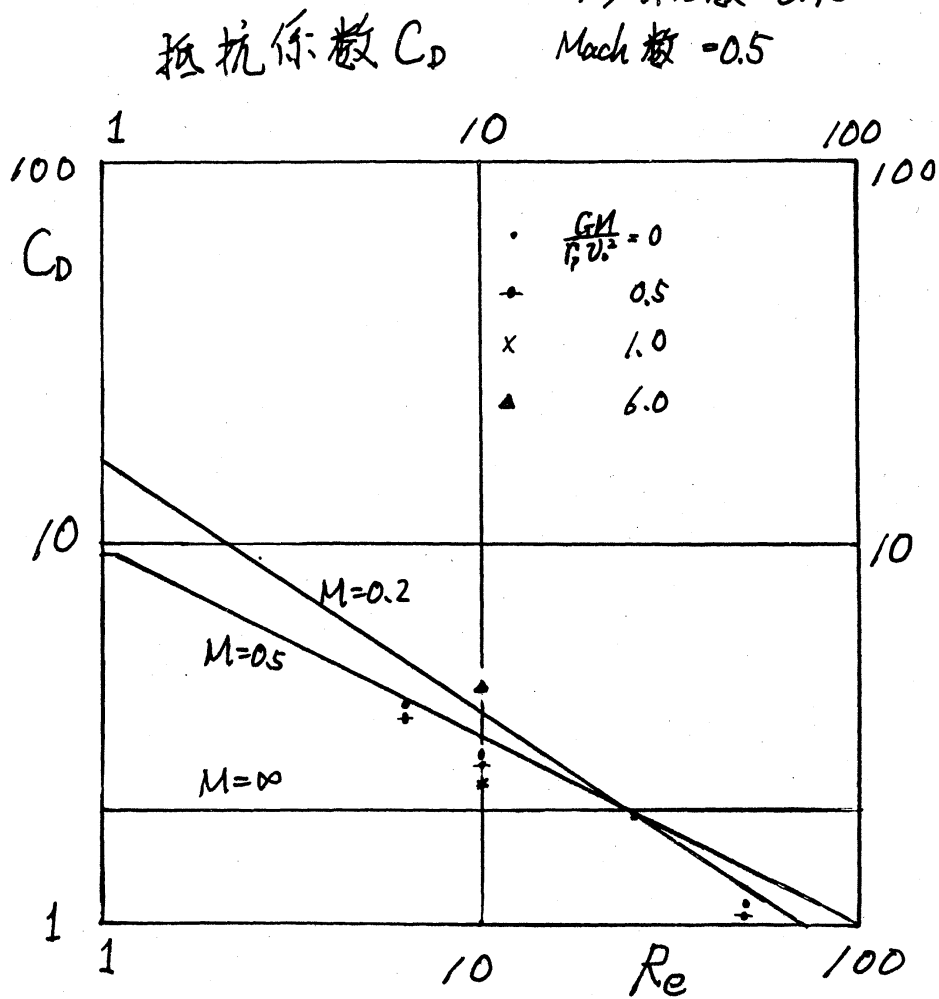
 抵抗係数の
Re 依存性


図-15 抵抗係数の

 $\frac{GM}{U_\infty^2}$ 依存性.

Mach数 = 0.5

 $Re = 50$ の場合, $\frac{GM}{U_\infty^2} r_p = 2, 3$ のときの C_D は, 計算が

十分収束しないの

で, この図には

plot していない。

